Question de cours

$\boxed{\text{Le rapport gyromagnétique}}$

1. $\boxed{\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}}$ et $\vec{\mu} = \frac{1}{2}\vec{r} \wedge q\vec{v}$ donne $\vec{\mu} = \frac{q}{2m}\vec{L}$

soit $\boxed{\gamma_{cl} = \frac{q}{2m}}$

2. L'expérience de Stern et Gerlach. $\vec{S}\cdot\vec{u} \rightarrow \boxed{\pm\frac{\hbar}{2}}$

3. Les projections de $\vec{\mu}$ sont $\gamma(\pm\hbar/2) = \pm\mu_B$ avec $\boxed{\mu_B = \frac{q\hbar}{4m}}$

ordre de grandeur: $\mu_B \simeq \frac{10^{-19}10^{-34}}{10^{-30}} = 10^{-23}\ \mathrm{J\,T^{-1}}$.

Oscillations anharmoniques - théorie des perturbations.

① $E_0^{(1)} = \langle \varphi_0 | \hat{H}_1 \varphi_0 \rangle = \int_{\mathbb{R}} |\varphi_0(q)|^2 q^4 \, dq$

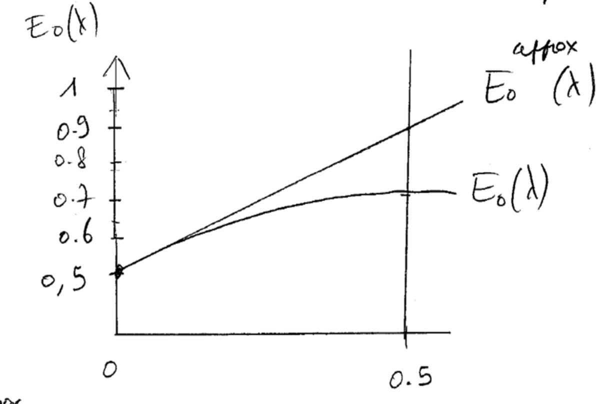
$$= \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{q^2}{\sigma^2}} q^4 \, dq = \frac{\sigma^5}{(\pi\sigma^2)^{1/2}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} x^4 \, dx\right)}_{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}} = \frac{3}{4}\sigma^4$$

on a posé $x = \frac{q}{\sigma}$.

② on a obtenu $E_0^{(\text{approx})}(\lambda) = \mathcal{E}_0 + \lambda \cdot E_0^{(1)}$

on a $\sigma = 1$.

$$= \frac{1}{2} + \lambda \cdot \frac{3}{4} = 0.5 + 0.75 \times \lambda$$



$E_0^{\text{approx}}(\lambda)$ est tangent à $E_0(\lambda)$ en $\lambda = 0$.

Effet de la taille finie du proton

$\hat{H}' = \hat{H} + \hat{W}$ donc $\boxed{\hat{W} = \begin{cases} \frac{e^2}{2r_0}\left[\left(\frac{\hat{r}}{r_0}\right)^2 - 3\right] + \frac{e^2}{\hat{r}} = \frac{e^2}{2r_0}\left[\left(\frac{\hat{r}}{r_0}\right)^2 + 2\frac{r_0}{\hat{r}} - 3\right] & \text{si } r \leq r_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

Il faut calculer
$$\langle \Psi_\beta | \hat{W} | \Psi_\beta \rangle = \frac{e^2 C^2}{2r_0} \int_0^{r_0} 4\pi r^2 dr\, e^{-2\beta r}\left(\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + 2\frac{r_0}{r} - 3\right)$$
$$= 2\pi \frac{e^2}{r_0}\frac{\beta^3}{\pi} \int_0^{r_0} dr\, \cancel{e^{-2r/a_B}} \left(\frac{r^4}{r_0^2} + 2r_0 r - 3r^2\right)$$

comme $r < r_0$ et $r_0 \ll a_B$

on prend $e^{-2r/a_B} \simeq 1$

$$= \frac{2e^2\beta^3}{r_0}\left[\frac{1}{5}\frac{r_0^5}{r_0^2} + r_0 r_0^2 - r_0^3\right] = \frac{2}{5} e^2 r_0^2 \beta^3$$

soit $\boxed{E'(\beta) = E(\beta) + \frac{2}{5} e^2 r_0^2 \beta^3}$

faisons $\frac{dE'}{d\beta} = 0 = \frac{\hbar^2}{m}\beta - e^2 + \frac{6}{5} e^2 r_0^2 \beta^2 \Leftrightarrow \frac{6 r_0^2}{5}\beta^2 + a_B \beta - 1 = 0$

comme $r_0 \ll a_B$, $\beta \simeq 1/a_B$ à l'ordre 0 en r_0/a_B et on peut écrire $\beta \simeq 1/a_B \left(1 - \frac{6}{5} r_0^2 \beta^2\right)$

$\beta^2 \approx 1/a_B^2$ à l'ordre 0 ici

soit $\beta \simeq \frac{1}{a_B}\left(1 - \frac{6}{5}\left(\frac{r_0}{a_B}\right)^2\right)$

le nouveau rayon est donc $a_B' = \frac{a_B}{1 - \frac{6}{5}\left(\frac{r_0}{a_B}\right)^2} \Rightarrow \boxed{a_B' \simeq a_B\left(1 + \frac{6}{5}\left(\frac{r_0}{a_B}\right)^2\right) > a_B}$

<u>l'électron est donc en moyenne plus loin du proton que a_B</u>

la correction est en $\left(\frac{r_0}{a_B}\right)^2 \simeq \left(\frac{10^{-15}}{0.5 \cdot 10^{-10}}\right)^2 \simeq 4 \cdot 10^{-10} \ll 1 \Rightarrow$ difficile à mesurer !

Cependant, ce genre de correction est mesurée et permet d'accéder à la taille du proton.

Règles de sélection et spectre d'absorption

14. on écrit $$\boxed{\langle \nu', l', m' | \underbrace{(d_0 + d_1 \hat{r})}_{\text{n'agit que sur } r \to \text{ donc sur les } |\nu\rangle} \underbrace{\cos\theta}_{\to \text{ sur les angles } \to \text{ sur les } |l,m\rangle} | \nu, l, m \rangle} = \langle \nu' | d_0 + d_1 \hat{r} | \nu \rangle \times \langle l', m' | \cos\theta | l, m \rangle$$

produit tensoriel

15. pour l'élément de matrice $\langle \nu' | d_0 + d_1 \hat{r} | \nu \rangle = \underbrace{\langle \nu' | \nu \rangle}_{= \delta_{\nu'\nu} \text{ soit } \nu' = \nu} d_0 + \langle \nu' | \hat{r} | \nu \rangle d_1$

et $\langle \nu | \hat{r} | \nu' \rangle \propto \langle \nu | a + a^\dagger | \nu' \rangle$

cours

$$\text{et } \begin{cases} \langle \nu | a | \nu' \rangle \propto \langle \nu | \nu' - 1 \rangle & \text{car } a|\nu'\rangle \propto |\nu' - 1\rangle \\ \langle \nu | a^\dagger | \nu' \rangle \propto \langle \nu | \nu' + 1 \rangle & \text{car } a^\dagger |\nu'\rangle \propto |\nu' + 1\rangle \end{cases}$$

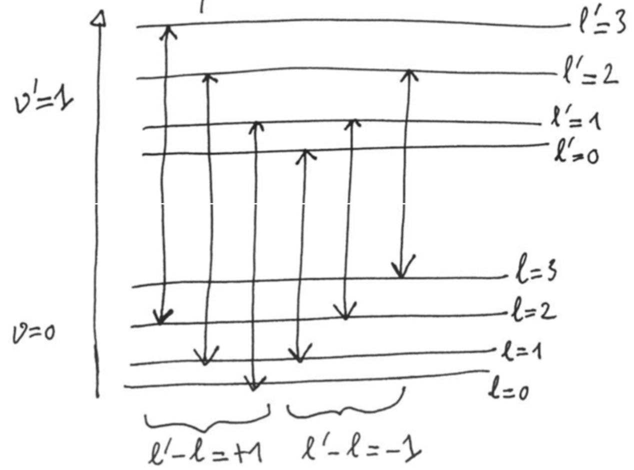
donc il y aura un terme $\delta_{\nu,\nu'-1}$ et $\delta_{\nu,\nu'+1}$

$\nu = \nu' - 1$ $\qquad$ $\nu = \nu' + 1$

on aura donc pour les transitions $\boxed{\nu' - \nu = -1, 0, 1}$

16. Les fonctions delta $\delta_{mm'}$ donnent $m = m'$ puis $\delta_{l', l-1}$ donne $l' = l - 1$ et $\delta_{l', l+1}$ donne $l' = l + 1$ soit $\boxed{l' - l = -1, 1}$

17. transitions entre $\nu = 0$ et $\nu' = 1$, on a tous les couples possibles de l, l' tels que $l' - l = -1, 1$



18. La fréquence ν_t correspond à une transition est $h\nu_t = E_{\nu', l'} - E_{\nu, l}$

pour $\left|\begin{array}{l} \ell' = \ell+1 \text{, on a } h\nu_t = \hbar\omega + B\{(\ell+1)(\ell+2) - \ell(\ell+1)\} = \underline{\hbar\omega + 2B(\ell+1)} \quad \text{[branche P]} \\ \ell' = \ell-1 \text{, on a } h\nu_t = \hbar\omega + B\{(\ell-1)\ell - \ell(\ell+1)\} = \underline{\hbar\omega - 2B\ell} \quad \text{[branche R]} \end{array}\right.$

Sur la figure, le nombre d'onde est $\sigma = 1/\lambda = \nu_t/c$ et on observe bien les deux branches se développant autour de $\boxed{\sigma_0 = \omega/2\pi c}$

Les raies sont typiquement espacées de $\boxed{\Delta\sigma = 2B/hc}$